
Resolução de Problemas Inversos de Condução de Calor Usando o Método dos Elementos de Contorno e o Algoritmo de Colônia de Vagalumes

Fran Sérgio Lobato*, Valder Steffen Jr, e Antônio J. Silva Neto

Resumo: A análise inversa de problemas de condução de calor tem um papel fundamental no desenvolvimento científico e tecnológico em diversas áreas das ciências e da engenharia. Tradicionalmente, estes problemas são resolvidos usando técnicas de otimização baseadas no uso do gradiente da função objetivo e das restrições. Neste capítulo, apresenta-se como alternativa para o tratamento destes problemas o Algoritmo de Colônia de Vagalumes, que se fundamenta no conceito de comportamento social coletivo para a atualização de candidatos à solução do problema inverso associado. Para a resolução do problema direto de transferência de calor por condução é utilizado o Método dos Elementos de Contorno.

Palavras-chave: Problema inverso, Algoritmo de colônia de vagalumes, Condução de calor, Método dos elementos de contorno.

Abstract: *The analysis of inverse heat conduction problems is an important tool that can be applied to various branches of science and engineering. Traditionally, these problems are solved by using optimization techniques based on gradient of objective function and constraints. In this chapter, the Fireflies Colony Algorithm, which is based on the collective social behavior concept, is used as an alternative approach for the resolution of the associate inverse problem. To solve the direct conduction heat transfer problem, the Boundary Element Method is used.*

Keywords: *Inverse problem, Fireflies colony algorithm, Heat conduction, Boundary element method.*

Conteúdo

| | | |
|-----|---|-----|
| 1 | Introdução | 94 |
| 2 | Formulação do Problema Direto de Transferência de Calor por Condução | 95 |
| 3 | Método dos Elementos de Contorno | 96 |
| 4 | Formulação do Problema Inverso de Transferência de Calor por Condução | 97 |
| 5 | Algoritmo de Colônia de Vagalumes | 98 |
| 5.1 | A Inspiração biológica..... | 98 |
| 5.2 | A Descrição do algoritmo..... | 98 |
| 6 | Resultados e Discussão..... | 99 |
| 6.1 | Estudo de caso 1 | 100 |
| 6.2 | Estudo de caso 2 | 102 |
| 7 | Conclusões..... | 103 |

*Autor para contato: fslobato@feq.ufu.br

1. Introdução

A análise inversa é uma poderosa ferramenta com aplicação em vários ramos da ciência e engenharia. No contexto da transferência de calor, a análise inversa é utilizada para determinar vários aspectos importantes do problema, a saber: identificação de forma (geometria), identificação das condições da superfície de contorno (como a temperatura e o fluxo de calor) e determinação de propriedades térmicas (como a condutividade e a difusividade). A importância desta análise se deve às numerosas aplicações práticas. No caso específico do problema de identificação de forma, este consiste em determinar formas desconhecidas a partir do conhecimento de dados experimentais das variáveis observáveis no interior e/ou na superfície do domínio sob análise, caracterizando desta forma um típico problema inverso de engenharia. Considerando a possibilidade da utilização de modelos mais complexos, juntamente com a informação fornecida pelos dados experimentais, os resultados obtidos pela resolução de um problema inverso podem ser usados para simular o comportamento do sistema para diferentes condições de operação.

Neste contexto, a literatura especializada apresenta várias aplicações de problemas inversos objetivando a determinação de forma. Huang & Chao (1997) identificaram os perfis de contorno em problemas de transferência de calor por condução em estado estacionário usando o algoritmo de Levenberg-Marquardt e o método do gradiente conjugado. Huang & Tsai (1998) resolveram um problema de condução transiente para identificar as configurações de contorno irregulares com base em medidas de temperatura. Kennon & Dulikravich (1985) e Dulikravich (1992) determinaram o tamanho, a forma, o número, e a localização das passagens de fluido no interior das palhetas de turbinas. Cheng & Chang (2003a) determinaram a forma de um cilindro considerando a distribuição de temperatura uniforme via formulação e resolução de um problema inverso. Cheng & Chang (2003b) propuseram uma modificação no método do gradiente conjugado aplicado ao problema inverso de transferência de calor para fins de identificação de forma. Fazeli & Mirzaei (2011) determinaram a forma de um tubo usado para refrigeração empregando um algoritmo baseado no gradiente em um problema de transferência de calor por condução associado ao método dos elementos finitos. Kazemzadeh-Parsi et al. (2011) utilizaram redes neurais artificiais para determinar a localização e o tamanho de cavidades circulares em um problema de transferência de calor por condução 2D utilizando dados experimentais. Lesnic & Bin-Mohsin (2012) resolveram um problema inverso para a determinação da geometria usando o método das soluções fundamentais associado ao método do gradiente conjugado considerando dados experimentais de temperatura e fluxo de calor. Fazeli & Mirzaei (2012) identificaram superfícies irregulares (tamanho e forma) em um problema inverso de transferência de calor por condução modelado por elementos finitos e depois otimizado por um método baseado na avaliação do gradiente da função objetivo e de suas restrições.

Tradicionalmente os problemas inversos têm sido resolvidos via aplicação de técnicas de otimização clássicas (determinísticas). Nos últimos anos, no entanto, técnicas de otimização baseadas no comportamento social de espécies da natureza têm sido empregadas para a resolução de problemas inversos. Neste contexto, o comportamento social de colônias de vagalumes foi explorado para o desenvolvimento de um novo algoritmo, o Algoritmo de Colônia de Vagalumes – ACV (*Firefly Colony Algorithm*), proposto por Yang (2008). Basicamente, a ideia principal deste algoritmo é o esquema proposto para atualização de cada vagalume via modelagem matemática da interação entre os mesmos, simulando as etapas de atração e acasalamento. Dentre as aplicações do ACV listadas na literatura, pode-se citar a sincronização de sensores em rede (Werner-Allen et al., 2005), o projeto de redes sem fio (Leidenfrost & Elmenreich, 2008), estimatização de condição inicial em problema de condução de calor (Luz et al., 2009), sua associação com modelos caóticos de busca (Lobato & Steffen Jr, 2010), tratamento de problemas de controle ótimo algébrico-diferenciais em engenharia química (Pfeifer & Lobato, 2010), otimização de funções matemáticas não-lineares com a presença de ruídos (Chai-ead et al., 2011), otimização de funções matemáticas clássicas através de um ACV modificado via desenvolvimento de um novo operador para determinar novas direções de busca dos vagalumes (Tilahum & Ong, 2012), aplicação em problemas de otimização lineares com a presença de ruídos (Pal et al., 2012), resolução de problemas de despacho econômico não-convexos (Yang et al., 2012), dentre outras. É importante ressaltar que apesar destas aplicações em áreas distintas da literatura, o número de contribuições na resolução de problemas inversos ainda é bastante limitado.

Para a resolução de qualquer problema inverso, quando formulado implicitamente como um problema de otimização, faz-se necessária, em cada iteração, a resolução de um problema direto (problema de simulação). Neste caso, em se tratando de métodos baseados em população, para cada iteração são necessárias várias avaliações da função objetivo, que dependem da complexidade do modelo a ser simulado. Em termos do tempo de processamento, quanto mais rápida for a avaliação

da função objetivo, melhor será o desempenho do algoritmo de otimização. Para a avaliação da função objetivo em problemas de transferência de calor, inúmeras metodologias numéricas podem ser aplicadas, dentre as quais pode-se citar o Método das Diferenças Finitas (MDF), o Método dos Volumes Finitos (MVF), o Método de Colocação (MC), o Método das Direções Alternadas (MDA), o Método das Soluções Fundamentais (MSF) e o Método dos Elementos de Contorno (MEC). Em se tratando de problemas inversos reais, de interesse prático, estes podem ter geometrias complexas, o que pode inviabilizar/dificultar a aplicação da grande maioria dos métodos numéricos citados, por exigirem a discretização do domínio em elementos de controle (Chan, 1991; Ang, 2007; Menin, 2009; Lobato et al., 2012). Para superar tais dificuldades, os métodos *meshless* tem sido amplamente estudados pela comunidade científica. Assim sendo, o MEC configura-se como uma estratégia interessante para o tratamento de problemas com geometrias e condições de contorno complexas. A principal vantagem do MEC é que ele necessita somente da discretização do contorno do domínio, o que reduz em muito o esforço computacional em relação às técnicas clássicas para a resolução de equações diferenciais parciais (Ang, 2007). Basicamente, no MEC é realizada a divisão do contorno em segmentos, ao longo dos quais deve-se determinar o valor da variável dependente ou de sua derivada na direção normal, dependendo de qual condição de contorno é aplicada em cada elemento, resultando desta forma na redução da dimensão do problema (Menin, 2009). Neste caso, a utilização do MEC para a obtenção de aproximações para a solução de equações diferenciais em problemas inversos reduz de forma significativa o custo computacional do processo de otimização, visto que a discretização do interior do domínio é evitada.

Diante do que foi apresentado, o presente capítulo tem por objetivo resolver problemas inversos de transferência de calor por condução visando a determinação de geometrias e/ou condições de contorno pela formulação de um problema inverso a ser resolvido pelo ACV associado ao MEC. Este capítulo é estruturado conforme segue. As Seções 2 e 3 apresentam a formulação do problema direto de condução de calor e aspectos gerais do MEC, respectivamente. Já na Seção 4 é apresentada a formulação do problema inverso de transferência de calor por condução. Na Seção 5 é apresentada uma breve revisão do ACV. Os resultados são descritos na seção 6. Finalmente, as conclusões e perspectivas para trabalhos futuros são descritas na última seção.

2. Formulação do Problema Direto de Transferência de Calor por Condução

Seja o problema de transferência de calor por condução em estado estacionário num meio homogêneo bidimensional definido pelo contorno $\partial\Omega = C_1 \cup C_2$, como mostrado na Figura 1 (Ang, 2007).

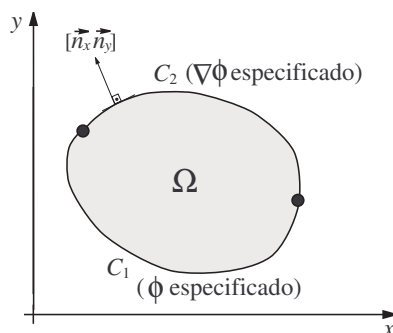


Figura 1. Domínio do problema de transferência de calor por condução.

Matematicamente, este problema pode ser formulado como (Huang & Chao, 1997; Ang, 2007):

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \quad (1)$$

$$\phi = f_1(x, y) \quad \text{para } (x, y) \in C_1 \quad (2)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = f_2(x, y) \quad \text{para } (x, y) \in C_2 \quad (3)$$

onde f_1 e f_2 são funções das variáveis independentes e C_1 e C_2 são os contornos que definem o domínio $\partial\Omega = C_1 \cup C_2$.

3. Método dos Elementos de Contorno

A principal ideia do MEC é transformar a equação diferencial de Laplace (Equação 1) que atua sobre todo o domínio Ω em uma equação integral que atua somente sobre o contorno do domínio ($\partial\Omega = C_1 \cup C_2$). Tal transformação é realizada através da chamada solução recíproca, que é uma relação entre duas soluções particulares quaisquer, Φ e ϕ , da equação diferencial parcial e de suas derivadas na direção normal, $\partial\Phi/\partial n$ e $\partial\phi/\partial n$, sobre o contorno do domínio $\partial\Omega$, e que pode ser calculada, por exemplo, para ϕ como

$$\frac{\partial\phi}{\partial n} = n_x \frac{\partial\phi}{\partial x} + n_y \frac{\partial\phi}{\partial y} \quad (4)$$

onde n_x e n_y são as componentes x e y do vetor normal unitário (Figura 1).

A obtenção da solução recíproca pode ser feita através do Teorema da Divergência de Gauss (Ambrosio et al., 2000). Para essa finalidade, sejam Φ e ϕ duas soluções particulares da equação de Laplace

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} = 0 \quad (5)$$

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = 0 \quad (6)$$

Se multiplicarmos a primeira equação por ϕ e a segunda equação por Φ e tomarmos a diferença entre as equações obtidas resulta

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\phi \frac{\partial\Phi}{\partial x} - \Phi \frac{\partial\phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\phi \frac{\partial\Phi}{\partial y} - \Phi \frac{\partial\phi}{\partial y} \right) = 0 \quad (7)$$

que é então integrada no domínio Ω

$$\int \int_{\Omega} \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\phi \frac{\partial\Phi}{\partial x} - \Phi \frac{\partial\phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\phi \frac{\partial\Phi}{\partial y} - \Phi \frac{\partial\phi}{\partial y} \right) \right) dx dy = 0 \quad (8)$$

A aplicação do Teorema da Divergência de Gauss converte a integral de área em Ω em uma integral de contorno em $\partial\Omega$

$$\int_{\partial\Omega} \left(\left(\phi \frac{\partial\Phi}{\partial x} - \Phi \frac{\partial\phi}{\partial x} \right) n_x + \left(\phi \frac{\partial\Phi}{\partial y} - \Phi \frac{\partial\phi}{\partial y} \right) n_y \right) ds = 0 \quad (9)$$

reescrita como

$$\int_{\partial\Omega} \left(\left(\phi \frac{\partial\Phi}{\partial x} n_x + \phi \frac{\partial\Phi}{\partial y} n_y \right) - \left(\Phi \frac{\partial\phi}{\partial x} n_x + \Phi \frac{\partial\phi}{\partial y} n_y \right) \right) ds = 0 \quad (10)$$

e que define a solução recíproca

$$\int_{\partial\Omega} \left(\phi \frac{\partial\Phi}{\partial n} - \Phi \frac{\partial\phi}{\partial n} \right) ds = 0 \quad (11)$$

onde

$$\phi \frac{\partial\Phi}{\partial n} = \phi \frac{\partial\Phi}{\partial x} n_x + \phi \frac{\partial\Phi}{\partial y} n_y \quad (12)$$

$$\Phi \frac{\partial\phi}{\partial n} = \Phi \frac{\partial\phi}{\partial x} n_x + \Phi \frac{\partial\phi}{\partial y} n_y \quad (13)$$

Como mencionado, a solução recíproca (Equação 11) fornece uma relação entre duas soluções quaisquer ϕ e Φ da equação de Laplace. Neste caso, se conhecermos uma solução particular, a outra pode ser obtida a partir da solução recíproca. No caso da equação de Laplace, uma solução particular

pode ser obtida se as coordenadas retangulares (x,y) forem convertidas para coordenadas polares (r,θ) , tal que $x=r \cos(\theta)$ e $y=r \sin(\theta)$. Assim, pode-se definir uma função Ψ tal que (Ang, 2007)

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \theta^2} = 0 \quad (14)$$

Supondo que a função $\Psi=\Psi(r)$, esta equação diferencial parcial se transforma em uma equação diferencial ordinária cuja solução analítica é

$$\phi(x,y) = \frac{\Psi(r)}{\pi^2} = \frac{1}{2\pi} \ln \left(\sqrt{(x-\xi)^2 + (x-\eta)^2} \right) \quad (15)$$

onde o ponto $(\xi$ e $\eta)$ é o centro do sistema de coordenadas com raio r e que produz a solução fundamental

$$\phi(x,y,\xi,\eta) = \frac{1}{4\pi} \ln \left((x-\xi)^2 + (x-\eta)^2 \right) \text{ para } (x,y) \neq (\xi,\eta) \quad (16)$$

A partir das Equações (11) e (16) pode-se determinar a equação integral do MEC para resolver o problema de Laplace (Equação (1)). Considerando $\Phi=\Phi(x,y,\xi,\eta)$ e que $\phi=\phi(x,y)$, a Equação (11) se torna

$$\int_{\partial\Omega} \left(\phi(x,y) \frac{\partial \Phi(x,y,\xi,\eta)}{\partial n} - \Phi(x,y,\xi,\eta) \frac{\partial \phi(x,y)}{\partial n} \right) ds = 0 \quad \text{para } (\xi,\eta) \neq \Omega \cup \partial\Omega \quad (17)$$

Deve ser observado que a equação acima é válida para pontos (ξ,η) que não pertencem ao domínio Ω e nem a $\partial\Omega$. No entanto, é possível superar esta dificuldade de forma a se determinar duas equações diferentes, uma válida para pontos interiores ao domínio Ω e outra para pontos do contorno $\partial\Omega$. Omitindo esse desenvolvimento matemático por ser extenso, pode-se mostrar que para o caso em que o ponto (ξ,η) localiza-se no interior de Ω , a Equação (17) se torna

$$\phi(x,y) \equiv \int_{\partial\Omega} \left(\phi(x,y) \frac{\partial \Phi(x,y,\xi,\eta)}{\partial n} - \Phi(x,y,\xi,\eta) \frac{\partial \phi(x,y)}{\partial n} \right) ds = 0 \quad \text{para } (\xi,\eta) \in \Omega \quad (18)$$

e para pontos localizados no contorno

$$\frac{1}{2} \phi(x,y) \equiv \int_{\partial\Omega} \left(\phi(x,y) \frac{\partial \Phi(x,y,\xi,\eta)}{\partial n} - \Phi(x,y,\xi,\eta) \frac{\partial \phi(x,y)}{\partial n} \right) ds = 0 \quad \text{para } (\xi,\eta) \in \partial\Omega \quad (19)$$

É importante ressaltar que na parte do contorno onde se impõe o potencial ϕ , não se conhece o valor de $\partial\phi/\partial n$ e vice versa. Sendo assim, primeiramente deve-se usar a Equação (19) para determinar os valores desconhecidos de ϕ e de $\partial\phi/\partial n$ nos pontos do contorno $\partial\Omega$. Em seguida, com estes valores, deve-se aplicar a Equação (18) para calcular o valor de ϕ em qualquer ponto (ξ,η) do domínio Ω .

Uma descrição matemática detalhada sobre o desenvolvimento apresentado pode ser encontrado em Ang (2007).

4. Formulação do Problema Inverso de Transferência de Calor por Condução

O problema inverso consiste na minimização do funcional Q (Equação (20)), i.e., na minimização da diferença entre os valores “experimentais” e os valores calculados pelo sistema de equações que regem o fenômeno em análise para fins de determinação da geometria e/ou das condições de contorno. Matematicamente, tem-se:

$$Q = \sum_{i=1}^N (\Gamma_{cal}^i - \Gamma_{exp}^i)^2 \quad (20)$$

onde N representa o número total de dados experimentais, Γ_{cal}^i e Γ_{exp}^i representam os perfis da variável observável, calculados pelo modelo e os experimentais, respectivamente.

Para a presente aplicação, como não são conhecidos pontos experimentais, considera-se conhecida a geometria e as condições de contorno do problema para a resolução do problema direto. Desta forma, conhecendo-se o perfil da variável dependente Γ em pontos do domínio e atribuindo-se um ruído aleatório, define-se os pontos “experimentais sintéticos”, i.e., os dados experimentais que serão utilizados neste capítulo. Esse ruído acrescido ao ponto calculado procura reproduzir erros de medição que são inerentes a qualquer procedimento experimental. Desse modo, tal aspecto será considerado neste trabalho através da seguinte relação:

$$\Gamma_{\text{exp}} = \Gamma_{\text{cal}} + r_i \sigma \quad (21)$$

onde r_i é um número aleatório entre -1 e 1 e σ é relacionado ao desvio padrão associado aos erros no procedimento experimental.

5. Algoritmo de Colônia de Vagalumes

Para a resolução do problema inverso, que visa a minimização do funcional dado pela Equação (20) será utilizado como ferramenta de otimização o Algoritmo de Colônia de Vagalumes (ACV). Esta seção apresenta uma breve descrição deste algoritmo, que é baseado no comportamento social de colônias de vagalumes.

5.1 A Inspiração biológica

O ACV é conceitualmente baseado na característica bioluminescente de vagalumes. Dentre as funções desempenhadas por esta luminescência pode-se enumerar as seguintes (Yang, 2008): (i) ferramenta de comunicação e atração para potenciais parceiros na reprodução; (ii) isca para atração de eventuais presas para o vagalume; (iii) mecanismo de alerta para potenciais predadores. A função da comunicação através dessa bioluminescência advém do fato observado que, em determinadas espécies de vagalumes, a taxa de intermitência e a intensidade dos flashes luminosos é parte essencial do mecanismo que atrai ambos os sexos para o ritual de acasalamento. As fêmeas são atraídas pelo brilho emitido pelos machos. Além disso, quando existe uma grande quantidade destes em uma área comum, o fenômeno de sincronização é responsável pela emissão dos flashes luminosos, evidenciando uma característica de auto-organização emergente (Yang, 2008).

5.2 A Descrição do algoritmo

O processo de inicialização da população no ACV, assim como acontece em outras estratégias baseadas em população (Price & Storn, 1997; Yang, 2008; Chai-ead et al., 2011), consiste na geração de indivíduos de forma aleatória. Neste caso, faz-se uso da definição do tamanho da população e do domínio de cada variável de projeto. A partir daí, geram-se números aleatórios que serão aplicados a esse intervalo, obtendo-se assim um vetor de indivíduos da população, como mostrado a seguir:

$$x_{i,j} = x_{i,L} + \text{rand}(x_{i,U} - x_{i,L}) \quad (22)$$

onde $x_{i,L}$ e $x_{i,U}$ são os limites inferiores e superiores das j -ésimas variáveis de projeto, respectivamente, e rand é um gerador de números aleatórios entre 0 e 1.

No algoritmo proposto por Yang (2008), as seguintes hipóteses foram consideradas: (i) os vagalumes não possuem sexo, portanto qualquer vagalume poderá atrair ou ser atraído; (ii) a atratividade é proporcional ao brilho emitido e decai conforme aumenta a distância entre os vagalumes; (iii) o brilho emitido por um vagalume é determinado pela sua avaliação frente ao objetivo (i.e., quanto melhor avaliado, mais brilhante). Neste sentido, a intensidade de emissão de luz de um vagalume é proporcional à função objetivo ($I(x)$), que decai em função da distância entre os vagalumes, devido à absorção da luz pelo meio. Assim, a intensidade percebida por um vagalume é dada por:

$$I(r) = I_o \exp(-\gamma r^2) \quad (23)$$

em que I_o é a intensidade da luz emitida; r é a distância Euclidiana entre os vagalumes i e j , sendo i o vagalume mais brilhante e j o vagalume menos brilhante; e γ é o parâmetro de absorção da luz pelo meio. O fator de atratividade β , responsável pela aproximação dos vagalumes, é definido como:

$$\beta = \beta_o \exp(-\gamma r^2) \quad (24)$$

onde β_o é a atratividade para uma distância $r = 0$. A movimentação em um dado passo de tempo t do vagalume i em direção ao vagalume j , em termos da função objetivo, é definida como:

$$x_i^t = x_i^{t-1} + \beta \left(x_j^{t-1} - x_i^{t-1} \right) + \alpha (rand - 0,5) \quad (25)$$

Na equação acima, o termo β introduz a parcela de atratividade, enquanto o parâmetro α regula a inserção de aleatoriedade no caminho percorrido pelo vagalume, onde $rand$ é um número aleatório entre 0 e 1.

No ACV o usuário deve informar os seguintes parâmetros: número de vagalumes (n), número de variáveis de projeto (D), fator de atratividade (β_o), parâmetro de inserção de regularidade (α) e número máximo de gerações (n_{gen}).

O pseudocódigo do ACV para o problema de minimização é apresentado a seguir (Yang, 2008).

Algoritmo de Colônia de Vagalumes

Início

Definir a função objetivo $Q(x)$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_D)^T$

Definir os parâmetros do ACV (n , D , β_o , α e n_{gen})

Para $i=1$ até o número máximo de gerações (n_{gen}) faça

Calcular a intensidade da luz I_i para x_i inversamente proporcional a $Q(x_i)$

Para $j=1$ até o número de vagalumes (n)

Calcular o fator de atratividade (Equação (24))

Mover o vagalume j em direção aos vagalumes mais brilhantes (Equação (25))

Verificar se o vagalume está dentro dos limites

Fim-Para

Fim-Para

Pós-processamento e visualização dos resultados

Fim

Como em qualquer método evolutivo, existe a possibilidade da população ficar estagnada em um ponto que não seja o ótimo global. Para aumentar a chance do algoritmo evitar esse tipo de situação foi acoplado ao algoritmo original um operador para evitar a estagnação da população. Neste operador, na t -ésima geração, calcula-se a média das últimas k -ésimas funções objetivo com relação à geração corrente t . Se a diferença entre a média e o valor da função objetivo referente ao melhor candidato for menor que uma tolerância pré-definida pelo usuário, a população corrente é substituída na íntegra por novos candidatos gerados aleatoriamente dentro do espaço de projeto. Dessa maneira, apesar do acoplamento desse operador levar naturalmente ao aumento do número de avaliações da função objetivo, é inserida diversidade à população que estava estagnada, o que aumenta a chance da população sair deste estado de estagnação, e conseqüentemente, continuar a busca pelo ótimo global.

6. Resultados e Discussão

O esquema computacional proposto para resolver o problema inverso de transferência de calor por condução consiste na definição das variáveis de projeto, bem como do seu domínio, dos parâmetros do ACV e dos parâmetros do MEC. Para cada avaliação da função objetivo, faz-se necessária a resolução do sistema de equações diferenciais (problema direto) através do MEC com os candidatos gerados pelo ACV. A Figura 2 ilustra este procedimento.

Para um melhor entendimento deste trabalho, a descrição dos parâmetros e demais procedimentos adotados são comentados a seguir:

- definição dos parâmetros do MEC: número de elementos de controle definidos para cada estudo de caso e apresentados nas tabelas a seguir, 25 elementos de controle discretizados no interior do domínio Ω , o sistema linear resultante da aplicação do MEC foi resolvido usando o Método de Gauss-Siedel com tolerância de 10^{-08} ;
- definição dos parâmetros do ACV: população com 50 vagalumes, fator de atratividade igual a 0,8, parâmetro de inserção de regularidade igual a 0,5, e número máximo de gerações igual

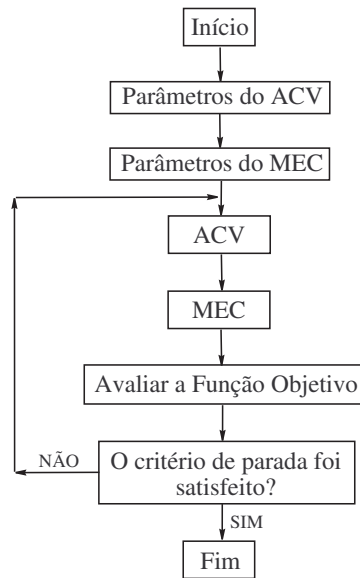


Figura 2. Esquema computacional para a resolução do problema inverso de transferência de calor por condução.

a 250. Para ativar a estratégia de refinamento considerou-se a média das últimas 20 gerações com tolerância de 10^{-2} ;

- todos os estudos de caso foram resolvidos dez vezes em um microcomputador Core i5 com 3 GB de memória para a apresentação dos valores médios. Considera-se um gerador de números aleatórios uniformemente distribuídos implementado no software MATLAB[®] com o seguinte vetor de sementes para a sua inicialização [0 1 2 3 4 5 6 7 8 9];
- são considerados estudos de caso sem ruído ($\sigma=0$) e com ruído ($\sigma=0,05$), vide Equação 21, que correspondem a erros da ordem de 7%;
- para fins de comparação são considerados os seguintes algoritmos (Silva-Neto & Becceneri, 2012): Algoritmos Genéticos (AG) (50 indivíduos, probabilidade de cruzamento igual a 0,5, probabilidade de mutação igual a 0,05, e número máximo de gerações igual a 250) e Otimização por Enxame de Partículas (PSO) (50 indivíduos, fatores de inércia, parâmetros de ponderação cognitivos e sociais iguais a 1,4, 1,5, e 2,5, respectivamente, e número máximo de gerações igual a 250);
- em todos os estudos de caso considerados foram utilizados 25 sensores (16 no contorno e 9 no interior), como apresentado nas Figuras (3) e (5);
- o critério de parada neste trabalho foi o número máximo de gerações para cada estratégia utilizada.

6.1 Estudo de caso 1

Seja o problema proposto por Ang (2007), cujo domínio $\Omega=[0, 1] \times [0, 1]$ é apresentado na Figura (3).

As condições de contorno associadas a este estudo de caso são:

$$\phi = 0 \text{ para } x = 0 \text{ e } 0 \leq y \leq 1 \quad (26)$$

$$\phi = \cos(\pi y) \text{ para } x = 1 \text{ e } 0 \leq y \leq 1 \quad (27)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = 0 \text{ para } y = 0 \text{ e } y = 1 \text{ e } 0 \leq x \leq 1 \quad (28)$$

Antes de resolver o problema inverso, será verificada a qualidade da solução do problema direto usando o MEC em termos do número de elementos de contorno utilizados. A Tabela 1 apresenta os resultados numéricos confrontados com a solução analítica ($\phi = \sinh(\pi x) \cos(\pi y) / \sinh(\pi)$).

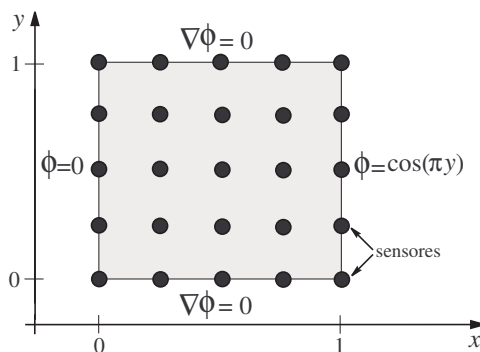


Figura 3. Domínio considerado no estudo de caso 1.

Tabela 1. Avaliação do MEC para a simulação do estudo de caso 1.

| $(\xi;\eta)$ | Número de elementos de contorno | | | | |
|------------------|---------------------------------|----------|----------|----------|-----------|
| | 20 | 40 | 60 | 80 | Analítica |
| (0,10;0,20) | 0,022397 | 0,022375 | 0,022375 | 0,022374 | 0,022371 |
| (0,10;0,30) | 0,016279 | 0,016262 | 0,016258 | 0,016256 | 0,016254 |
| (0,10;0,40) | 0,008559 | 0,008549 | 0,008547 | 0,008546 | 0,008545 |
| (0,50;0,20) | 0,161520 | 0,161316 | 0,161266 | 0,161246 | 0,161212 |
| (0,50;0,30) | 0,117325 | 0,117195 | 0,117162 | 0,117149 | 0,117127 |
| (0,50;0,40) | 0,061672 | 0,061610 | 0,061594 | 0,061588 | 0,061577 |
| (0,90;0,20) | 0,590102 | 0,590022 | 0,589989 | 0,589973 | 0,589941 |
| (0,90;0,30) | 0,428609 | 0,428634 | 0,428630 | 0,428627 | 0,428618 |
| (0,90;0,40) | 0,225307 | 0,225337 | 0,225340 | 0,225339 | 0,225338 |
| CPU ¹ | 0,12 | 0,25 | 0,56 | 1,12 | - |
| Ξ^2 | 0,11 | 0,04 | 0,02 | 0,01 | - |

¹Tempo de processamento em segundos.²Erro relativo médio (%).

Nesta tabela é possível observar uma boa concordância entre os resultados simulados pelo MEC e a solução analítica, com erro máximo da ordem de 0,11 % para 20 elementos de controle. Além disso, como esperado, o aumento do número de elementos de controle aumenta a precisão do MEC, e por consequência, o tempo de processamento.

Com o intuito de avaliar o desempenho do ACV, o problema inverso referente ao estudo de caso 1 consiste da minimização do funcional dado pela Equação (20) visando a determinação da condição de contorno em $x=1$ e $0 \leq y \leq 1$, descrita pela Equação (27).

A Tabela 2 apresenta os resultados obtidos pelos algoritmos ACV, AG e PSO considerando dados experimentais sintéticos com e sem ruído para 80 elementos de controle.

Tabela 2. Resultados numéricos obtidos pelos algoritmos ACV, AG e PSO para o estudo de caso 1.

| | Função Objetivo (Equação (20)) | | |
|---------------|--------------------------------------|-------------------------|-------------------------|
| | AG | PSO | ACV |
| $\sigma=0$ | 1,0227E-06 (6,0289E-07) [†] | 1,4502E-06 (7,3325E-07) | 1,1043E-07 (9,1848E-08) |
| $\sigma=0,05$ | 0,0104 (8,7513E-05) | 0,0098 (1,3513E-05) | 0,0093 (9,8170E-06) |
| N_{aval}^1 | 12550 | 12550 | 14255 |

¹Número de avaliações da função objetivo.[†]Desvio padrão.

Conforme pode ser observado nesta tabela, todos os algoritmos foram capazes de obter resultados satisfatórios para o problema com dados experimentais sem ruído e boas estimativas para o problema onde ruído é considerado. É importante destacar que, devido à inclusão do operador para refinamento

de soluções no ACV, são necessárias mais avaliações da função objetivo (cerca de 14 %) em relação aos algoritmos AG e PSO. Isto é justificável na medida em que mais avaliações da função objetivo são requeridas no operador de refinamento.

Na Figura (4) é apresentado o valor médio da função objetivo (Equação (20)) em função do número de gerações, para cada um dos algoritmos empregados.

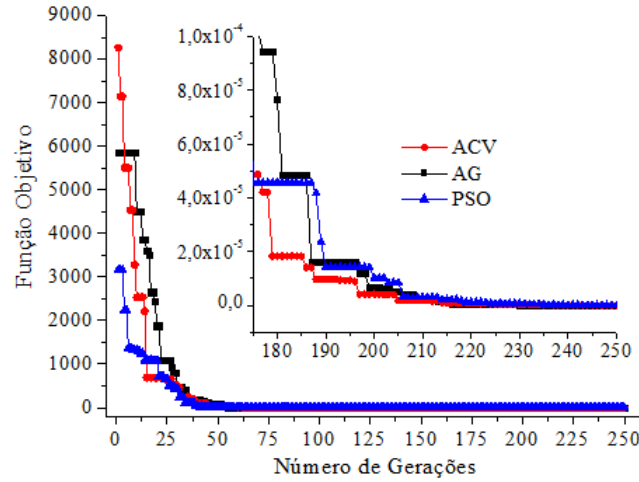


Figura 4. Função objetivo versus número de gerações para o estudo de caso 1 (Dados experimentais sem ruído, $\sigma=0$).

6.2 Estudo de caso 2

Seja o problema proposto por [Ang \(2007\)](#), cujo domínio é apresentado na Figura (5).

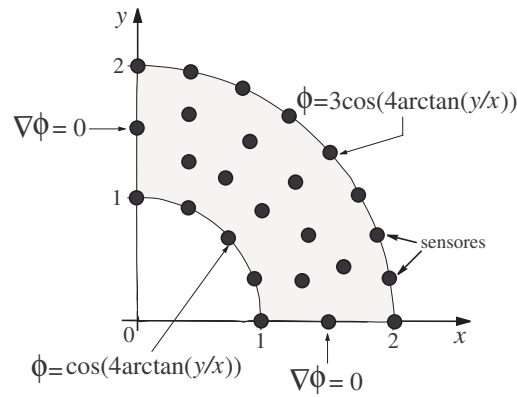


Figura 5. Domínio considerado no estudo de caso 2.

As condições de contorno associados a este estudo de caso são:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = 0 \text{ para } x = 0 \text{ e } 1 \leq y \leq 2 \quad (29)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = 0 \text{ para } y = 0 \text{ e } 1 \leq x \leq 2 \quad (30)$$

$$\phi = \cos \left(4 \arctan \left(\frac{y}{x} \right) \right) \text{ para } x^2 + y^2 = 1 \text{ e } 0 \leq x, y \leq 1 \quad (31)$$

$$\phi = 3 \cos \left(4 \arctan \left(\frac{y}{x} \right) \right) \text{ para } x^2 + y^2 = 4 \text{ e } 0 \leq x, y \leq 2 \quad (32)$$

A Tabela 3 apresenta os resultados numéricos confrontados com a solução analítica ($\phi = 16/85((x^2 + y^2)^2 - 1/(x^2 + y^2)^2) - 16/255((x^2 + y^2)^2/16 - 16/(x^2 + y^2)^2) \cos(4 \arctan(y/x))$) para diferentes números de elementos de controle.

Tabela 3. Avaliação do MEC para a simulação do estudo de caso 2.

| $(\xi; \eta)$ | Número de elementos de contorno | | | Analítica |
|------------------|---------------------------------|-----------|-----------|-----------|
| | 60 | 120 | 240 | |
| (1,0825;0,6250) | -0,359761 | -0,379226 | -0,388946 | -0,392045 |
| (0,8750;1,5155) | -0,892767 | -0,901232 | -0,905432 | -0,907816 |
| (1,0606;1,0606) | -1,080586 | -1,078836 | -1,077954 | -1,094211 |
| (1,0999;0,0019) | 0,8331354 | 0,8330876 | 0,833108 | 0,826958 |
| (1,0100;0,0001) | 0,9788720 | 0,9736364 | 0,975643 | 0,975656 |
| CPU ¹ | 1,87 | 5,96 | 26,39 | - |
| Ξ^2 | 2,45 | 1,27 | 0,66 | - |

¹Tempo de processamento em segundos.

²Erro relativo médio (%).

Assim como no estudo de caso anterior, na Tabela 3 é possível observar boa concordância entre os resultados simulados pelo MEC e a solução analítica, com erro máximo da ordem de 2,45 % para 60 elementos de controle. O aumento do número de elementos de controle aumenta a precisão às custas do aumento do tempo de processamento.

O problema inverso associado ao estudo de caso 2 consiste da determinação da geometria e da condição de contorno definida em $x^2 + y^2 = 1$ e $x^2 + y^2 = 4$, descritas, respectivamente, pela Equação (31) e pela Equação (32). A Tabela 4 apresenta os resultados obtidos pelos algoritmos ACV, AG e PSO considerando dados experimentais sintéticos com e sem ruído, para 120 elementos de controle.

Tabela 4. Resultados numéricos obtidos pelos algoritmos ACV, AG e PSO para o estudo de caso 2.

| | Função Objetivo (Equação (20)) | | |
|---------------|--------------------------------------|-------------------------|-------------------------|
| | AG | PSO | ACV |
| $\sigma=0$ | 2,7454E-05 (2,8879E-06) [†] | 1,0892E-05 (4,2995E-06) | 8,3989E-06 (2,4998E-07) |
| $\sigma=0,05$ | 0,0014 (2,1773E-03) | 0,0011 (4,1883E-03) | 0,0012 (5,7880E-03) |
| N_{aval}^1 | 12550 | 12550 | 15755 |

¹Número de avaliações da função objetivo.

[†]Desvio padrão.

Na tabela acima é possível observar que todos os algoritmos foram capazes de obter resultados satisfatórios para o problema sem ruído e boas estimativas para o problema onde ruído é considerado. No caso do ACV, são necessárias cerca de 26 % mais avaliações da função objetivo em relação aos algoritmos AG e PSO devido à inclusão do operador para refinamento de soluções.

A Figura (6) apresenta o valor médio da função objetivo (Equação (20)) em função do número de gerações para cada um dos algoritmos.

7. Conclusões

O presente capítulo teve por objetivo a resolução de problemas inversos de transferência de calor por condução usando o ACV associado ao MEC para fins da determinação da geometria e/ou condições de contorno, visando dois estudos de caso. Primeiramente foi avaliada a qualidade da solução obtida pelo MEC quanto ao número de elementos de contorno. Em seguida, foi aplicado o ACV para a resolução do problema inverso. De posse dos resultados foi possível concluir que a metodologia proposta configura-se como uma alternativa interessante para o tratamento de problemas inversos. Isto se deve a dois fatores: o primeiro diz respeito à redução do tempo computacional necessário para a resolução do problema direto, além da habilidade do MEC para o tratamento de geometrias complexas; em segundo lugar, o ACV mostrou-se eficiente quando comparado com outros algoritmos clássicos em termos do valor mínimo da função objetivo. É importante ressaltar que a inclusão

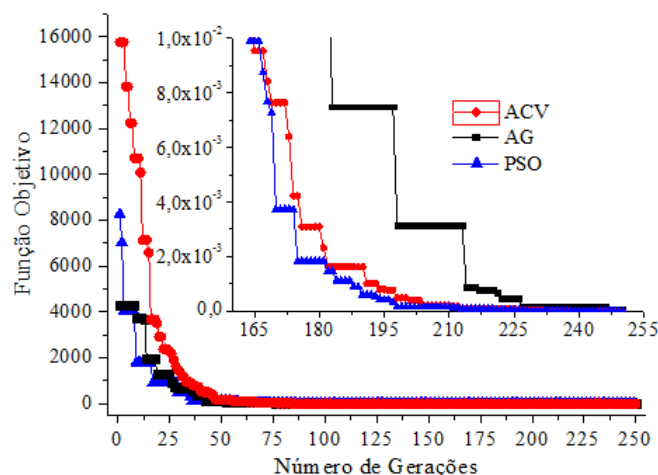


Figura 6. Função objetivo versus número de gerações para o estudo de caso 2 (Dados experimentais sem ruído, $\sigma=0$).

do operador para refinamento de soluções implica no aumento do número de avaliações da função objetivo, independentemente da estratégia de otimização adotada.

Como linhas de trabalhos futuros pode-se citar a avaliação de problemas com dados experimentais reais e a presença de incerteza na estimação da geometria e/ou condições de contorno através da introdução do conceito de robustez.

Agradecimentos

F.S.L. agradece o suporte financeiro da FAPEMIG, Fundação de Amparo à Pesquisa de Minas Gerais, e do CNPq, Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico. V.S. agradece o apoio do INCT-EIE, através de recursos do CNPq e da FAPEMIG. A.J.S.N. agradece o suporte financeiro advindo da FAPERJ, Fundação Carlos Chagas Filho de Amparo à Pesquisa do Estado do Rio de Janeiro e do CNPq.

Referências

- Ambrosio, L.; Fusco, N. & Pallara, D., *Functions of Bounded Variation and Free Discontinuity Problems*. 1ª edição. New York: Oxford Mathematical Monographs, The Clarendon Press, Oxford University, 2000.
- Ang, W.T., *A Beginner's Course in Boundary Element Methods*. 1ª edição. Boca Raton, USA: Universal Publishers, 2007.
- Chai-ead, N.; Aungkulanon, P. & Luangpaiboon, P., Bees and firefly algorithms for noisy non-linear optimisation problems. In: *Proceedings of the International MultiConference of Engineers and Computer Scientists*. p. 1–6, 2011.
- Chan, C.L., Boundary element method analysis for the bioheat transfer equation. *Journal of Biomechanical Engineering*, 1:358–365, 1991.
- Cheng, C.H. & Chang, M.H., Shape design for a cylinder with uniform temperature distribution on the outer surface by inverse heat transfer method. *Int J Heat Mass Transfer*, 46(2):101–111, 2003a.
- Cheng, C.H. & Chang, M.H., A simplified conjugate-gradient method for shape identification based on thermal data. *Numerical Heat Transfer, Part B: Fundamentals: An International Journal of Computation and Methodology*, 43(5):489–507, 2003b.
- Dulikravich, G.S., Inverse design of proper number, shapes, sizes and locations of coolant flow passages. In: Williams, R.W. (Ed.), *Proceedings of 10th Annual Workshop for Computational Fluid Dynamics Applications in Rocket Propulsion, Part 1*, NASA MSFC, Huntsville, AL, NASA CP-3163. Washington, USA, p. 467–486, 1992.
- Fazeli, H. & Mirzaei, M., Shape identification of frost formation around refrigeration tube via the inverse heat conduction approach. *Computational Thermal Sciences*, 3(4):375–387, 2011.
- Fazeli, H. & Mirzaei, M., Shape identification problems on detecting of defects in a solid body using inverse heat conduction approach. *Journal of Mechanical Science and Technology*, 26(11):3681–3690, 2012.
- Huang, C.H. & Chao, B.H., An inverse geometry problem in identifying irregular boundary configurations. *Int J Heat Mass Transfer*, 40(1):2045–2053, 1997.
- Huang, C.H. & Tsai, C.C., A transient inverse two-dimensional geometry problem in estimating time-dependent irregular boundary configurations. *Int J Heat Mass Transfer*, 41(3):1707–1718, 1998.

- Kazemzadeh-Parsi, M.J.; Ahmadfard, M.A. & Tahavvor, A., Location and size identification of circular cavities via boundary temperature measurements using artificial neural network. In: 19th Annual Conference on Mechanical Engineering - ISME201110-12. The University of Birjand, Birjand, Iran, p. 1-4, 2011.
- Kennon, S.R. & Dulikravich, G.S., Inverse design of internally cooled turbine blades. *Trans ASME J Eng Gas Turb Power*, 107(2):123-126, 1985.
- Leidenfrost, R. & Elmenreich, W., Establishing wireless time-triggered communication using a firefly clock synchronization approach. In: Proceedings of the 2008 International Workshop on Intelligent Solutions in Embedded Systems. Regensburg, Germany, p. 1-18, 2008.
- Lesnic, D. & Bin-Mohsin, B., Inverse shape and surface heat transfer coefficient identification. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 236(7):1876-1891, 2012.
- Lobato, F.S.; Malagoni, R.A.; Arouca, F.O. & Steffen Jr, V., Modelagem e simulação do processo de bio-transferência de calor em tecidos. In: Anais do XIX Congresso Brasileiro de Engenharia Química, 09 a 12 de Setembro, Búzios-Brazil. p. 1-10, 2012.
- Lobato, F.S. & Steffen Jr, V., Desenvolvimento de uma estratégia de otimização auto-adaptativa usando modelos caóticos de busca e o algoritmo de vagalume. In: XIII Encontro de Modelagem Computacional. Nova Friburgo-RJ, Brasil, p. 1-10, 2010.
- Luz, E.F.P.; Becceneri, J.C. & Campos Velho, H.F., Conceitualização do algoritmo vagalume e sua aplicação na estimativa de condição inicial da equação de calor. In: IX Workshop do Curso de Computação Aplicada do INPE. INPE - São José dos Campos, p. 1-10, 2009.
- Menin, O.H., *Método dos Elementos de Contorno para Tomografia em Impedância Elétrica*. Dissertação de mestrado, Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras de Ribeirão Preto, Programa de Física Aplicada à Medicina e Biologia, 2009.
- Pal, S.K.; Rai, C.S. & Singh, A.P., Comparative study of firefly algorithm and particle swarm optimization for noisy non-linear optimization problems. *Int J Intelligent Systems and Applications*, 10(1):50-57, 2012.
- Pfeifer, A.A. & Lobato, F.S., Solution of singular optimal control problems using the firefly algorithm. In: VI Congreso Argentino de Ingeniería Química - CAIQ2010. Asociación Argentina de Ingenieros Químicos, p. 1-8, 2010.
- Price, K. & Storn, R., Differential evolution - a simple evolution strategy for fast optimization. *Dr Dobb's Journal*, 22(4):18-24, 1997.
- Silva-Neto, A.J. & Becceneri, J.C., *Técnicas de Inteligência Computacional Inspiradas na Natureza - Aplicação em Problemas Inversos e Transferência Radiativa*. 2^a edição. Notas em Matemática Aplicada, Vol. 41, SBMAC, São Carlos-SP, Brasil, 2012.
- Tilahun, S.L. & Ong, H.C., Modified firefly algorithm. *Journal of Applied Mathematics*, 2012(1):1-12, 2012.
- Werner-Allen, G.; Tewari, G.; Patel, A.; Welsh, M. & Nagpal., R., Firefly-inspired sensor network synchronicity with realistic radio effects. In: Proceedings of the Third International Conference on Embedded Networked Sensor Systems. p. 142-153, 2005.
- Yang, X.; Hosseini, S.S.S. & Gandomi, A.H., Firefly algorithm for solving non-convex economic dispatch problems with valve loading effect. *Applied Soft Computing*, 12(2):1180-1186, 2012.
- Yang, X.S., *Nature-Inspired Metaheuristic Algorithms*. 1^a edição. Luniver Press, Cambridge, 2008.

